ACCQ204 18 Jan. 2016

Cours 5

Enseignant: Aslan Tchamkerten

Ces notes sont basées sur les présentations des tutorials ISIT2012 des Profs. E. Arikan et E. Telatar.

On utilisant les notations vue en classe, fixer $0 < \varepsilon < 1/2$ et définir les classes de canaux bons, mauvais, et médiocres comme

$$K_n^+ = \frac{1}{2^n}|\{Q^{b_1,b_2,\ldots,b_n} : I(Q^{b_1,b_2,\ldots,b_n}) \geq 1-\varepsilon\}|$$

$$K_n^- = \frac{1}{2^n}|\{Q^{b_1,b_2,\ldots,b_n} : I(Q^{b_1,b_2,\ldots,b_n}) \leq \varepsilon\}|$$

$$K_n^0 = \frac{1}{2^n}|\{Q^{b_1,b_2,\ldots,b_n} : \varepsilon < I(Q^{b_1,b_2,\ldots,b_n}) < 1-\varepsilon\}|$$

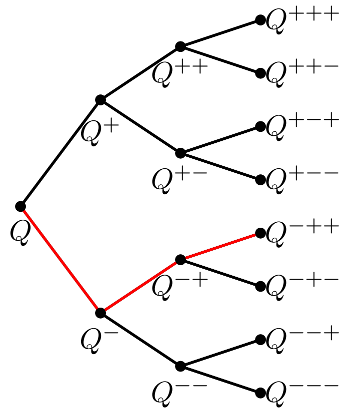
Théorème : Pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$K_n^+ \to I_0 \qquad K_n^- \to 1-I_0 \qquad K_n^0 \to 0.$$

Les canaux obtenus par polarization tendent donc à se partagent en deux classes : dans l'une les canaux sont quasi parfait, de capacité proche de 1, dans l'autre les canaux sont quasi totalement bruités, de capacité presque nulle. La proportion des canaux dans la première classe tend vers I_0 et la proportion des canaux dans la deuxième classe tend vers $1-I_0$. Les proportion de canaux médiocres tend à disparaître.

Preuve sans martingale :

1. Représenter les canaux comme les noeuds d'un arbre binaire comme ci-dessous



2. Choisir un chemin aléatoire $B_1, B_2, \ldots$ avec B_i prenant valeur $\{+, -\}$ de façon équiprobable.
3. Ce chemin définit une suite aléatoire d'information mutuelles

$$I_0(Q), I_1 = I(Q^{B_1}), I_2 = I(Q^{B_1,B_2}), ...$$

4. La suite satisfait

$$\mathbb{E}(I_i|I^j) = I_j$$

pour tout $i \geq j$ ($I^j = I_1, I_2, \ldots, I_j$). En effet, puisque

$$I(Q) = \frac{1}{2}(I(Q^-) + I(Q^+))$$

on a ($i > j$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I_i|I^j) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(I_i|I^{i-1})|I^j)\\ &= \mathbb{E}(I_{i-1}|I^j)\\ &= \mathbb{E}(I_{i-2}|I^j)\\ &= ...\\ &= \mathbb{E}(I_j|I^j)\\ &= I_j\ .\end{aligned}$$

5. Par 4. il suit que

$$\mathbb{E}(I_i) = I_0 \quad i \geq 0.$$

6. Soit $D_n = I_{n+1} - I_n$. Alors par 5. on a $E(D_i) = 0$ pour tout $i \geq 0$. De plus on a

$$E(D_iD_j) = 0$$

pour tout $i, j \geq 0$, $i \neq j$. En effet, supposons (sans perte de généralité) que $i > j$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_iD_j) &= E(E(D_iD_j|I^{j+1}))\\ &= \mathbb{E}(D_jE(D_i|I^{j+1}))\end{aligned}$$

et puisque

$$\mathbb{E}(D_i|I^{j+1}) = \mathbb{E}(I_{i+1} - I_i|I^{j+1}) = \mathbb{E}(I_{i+1}|I^{j+1}) - \mathbb{E}(I_i|I^{j+1})$$

et que

$$\mathbb{E}(I_{i+1}|I^{j+1}) = \mathbb{E}(I_i|I^{j+1}) = I_{j+1}$$

par 4., il suit que

$$\mathbb{E}(D_iD_j) = 0$$

pour tout $i \neq j$.

7. Puisque $0 \leq I_j \leq 1$ on a

$$\begin{aligned} 1 &\geq (I_n - I_0)^2 \\ &= \sum_{i,j=0}^{n-1} D_i D_j \,. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance des deux côtés de l'inégalité on a

$$1 \geq \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbb{E}(D_i D_j) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(D_i^2)$$

où l'égalité suit de 6.

8. De 7. on a que la somme $\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(D_i^2)$ converge et donc que $\mathbb{E}(D_n^2) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Par l'inégalité de Chebyshev on a

$$P(|D_n| > \delta) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9. Par 8. et le Lemme du progrès guaranti on a que pour tout $\varepsilon > 0$

$$P(I_n \notin (\varepsilon, 1-\varepsilon)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

10. Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$ fixé on a

$$\begin{aligned} I_0 &= \mathbb{E}(I_n) \\ &= \mathbb{E}(I_n | I_n \geq 1-\varepsilon) P(I_n \geq 1-\varepsilon) \\ &+ \mathbb{E}(I_n | I_n \leq \varepsilon) P(I_n \leq \varepsilon) \\ &+ \mathbb{E}(I_n | \varepsilon < I_n < 1-\varepsilon) P(\varepsilon < I_n < 1-\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

En utilisant 9. on déduit que

$$I_0 - 2\varepsilon \leq P(I_n \geq 1-\varepsilon) \leq \frac{I_0}{1-\varepsilon}$$

pour $n \geq n(\varepsilon)$ avec $n(\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \infty$. Et puisque

$$P(I_n \leq \varepsilon) = 1 - P(\varepsilon < I_n < 1-\varepsilon) - P(I_n \geq 1-\varepsilon)$$

on déduit le théorème.

Preuve avec martingale :

1.-4. Idem preuve précédente

5. Par 4. $\{I_i\}_{i\geq 0}$ est une martingale qui de plus converge presque surement car cette martingale est bornée. En définissant

$$D_n = I_{n+1} - I_n$$

il s'en suite que D_n tend vers zero presque surement.

9.-10. Idem preuve précédente.